

Examen Physique Générale II

Thermodynamique

SIE GC

Énoncé

Ne pas ouvrir avant le début de l'épreuve

Instructions :

- Vérifier que votre nom et numéro sciper sont corrects.
- Le cahier ne doit pas être dégrafé, les pages ne doivent pas être séparées. Les brouillons ne seront pas ramassés. Seul le cahier de réponses est corrigé
- **Ne pas ajouter de feuilles sur papier libre. Elles ne seront pas scannées et donc pas corrigées**
- Des cadres libres ont été ajoutés à la fin des exercices et du feuillet, en cas de nécessité
- **Le ramassage des copies (cahier et énoncé) se fait uniquement à la table, même pour les départs anticipés**
- Seul document autorisé: un formulaire manuscrit A4 recto/verso. Pas de calculatrice. Pas de téléphone.
- L'énoncé de l'examen comporte 8 pages avec 3 exercices, numérotés de 1 à 3. Le cahier de réponses comporte 28 pages. Le nombre de points maximum pour cet examen est de 50 points + 3 points de bonus.
- Dans tous les problèmes, sauf indication contraire, les résultats sont à exprimer en fonction des données fournies et des constantes physiques connues. Chaque réponse doit être justifiée dans le cadre prévu à cet effet.
- Beaucoup des questions sont conceptuelles ou bien nécessitent très peu de calculs et sont indépendantes les unes des autres. On pourra admettre la solution d'une question donnée dans l'énoncé pour résoudre les questions suivantes.
- Si il y a des applications numériques (AN), **seul un ordre de grandeur est demandé.**

Durée de l'examen : 3 heures et 30 minutes

Page vide

Exercice 1 : Cycle de Carnot mal dimensionné (17 points+ 1 points Bonus)

Notations et variables utilisées :

C_v	Capacité calorifique à volume constant.
C_p	Capacité calorifique à pression constante.
γ	Coefficient adiabatique.
R	Constante des gaz parfaits.
n	Nombre de moles.
P_i, V_i, T_i	Pression, volume et température de l'état i.
T_f, T_c	Températures des sources froides et chaudes.
Q_f, Q_c	Chaleurs échangées avec les sources froides et chaudes.
Q_{Carnot}	Chaleurs échangées avec la source chaude pour le cycle idéal de Carnot.
Q_{ij}	Chaleur échangée pour la transformation de l'état i à j.
W_{ij}	Travail échangé pour la transformation de l'état i à j.
W_{Carnot}	Travail échangé pour le cycle idéal de Carnot (partie A).
W_{tot}	Travail échangé pour le cycle
ΔU_{ij}	Variation d'énergie interne pour la transformation de l'état i à j.
η_{Carnot}	Rendement du cycle idéal de Carnot (partie A).
η	Rendement du cycle.

Note : très peu de calculs sont nécessaires pour répondre aux questions. Les réponses doivent toujours être justifiées.

Partie A. Cette partie est constituée de questions de cours sur le cycle de Carnot. On considère un cycle moteur de Carnot effectué avec un gaz parfait.

-a- Dessiner sur un diagramme $p(V)$ le cycle. On note A, B, C et D les quatre états du cycle, avec A le point pour lequel le volume est le plus grand et le gaz est à la température de la source froide. Indiquez les températures chaudes et froides et les échanges de chaleur.

-b- Montrer que l'on doit avoir un rapport précis entre les rapports de compression V_B/V_A et V_C/V_D .

-c- Rappeler dans le tableau les expressions des chaleurs et travaux échangés et la variation d'énergie interne pour chaque transformation.

-d- Rappeler la définition du rendement, η_{Carnot} , de ce cycle et donner son expression en fonction de Q_c et Q_f puis de T_c et T_f .

Partie B. La détente adiabatique est mal dimensionnée. La détente adiabatique dans le cycle a été mal dimensionnée et le volume final est trop grand. Le gaz arrive au point A, le dépasse et arrive à un état E, $V_E > V_A$.

-e- Comparez T_E et T_f

-f- Une fois en E le gaz se réchauffe à T_f de manière isochore (volume constant) et se trouve dans l'état F, puis la compression isotherme est effectuée de F à B et passe donc par le point A. Dessinez l'ensemble du cycle ABCDEF sur un diagramme $p(V)$.

-g- Donner le signe des chaleurs et travaux échangés (indiquer 0 si la valeur est nulle) pour les transformations AE, EF et FA

-h- Quel est le signe du travail échangé, W_{AEF} , pour le cycle AEFA ? Justifiez.

-i- Exprimer le travail total, W_{tot} , en fonction du travail du cycle idéal de Carnot, W_{Carnot} et W_{AEF} .

-j- Comparez (et justifiez) les *valeurs absolues* $|W_{Carnot}|$ et $|W_{tot}|$.

-k- Exprimez les chaleurs échangées avec la source chaude, Q_c , et la source froide, Q_f , en fonction des chaleurs échangées, Q_{ij} , pour chaque transformations et comparer Q_c avec la chaleur échangée avec la source chaude lors du cycle idéal de Carnot (partie A), Q_{Carnot} .

-l- Exprimer le rendement, η , du cycle en fonction de W_{Carnot} , W_{AEF} et Q_c . Comparez le avec celui du cycle, η_{Carnot} , du cycle idéal de la partie A.

-m- **Question Bonus :** Calculez $\eta - \eta_{Carnot}$, en fonction des données du problème.

Partie C. La compression adiabatique est mal dimensionnée. Inversement, on considère maintenant le cas où c'est le volume final de la compression adiabatique qui est mal dimensionné et on arrive à un état E dont le volume final est trop petit ($V_E < V_C$). De la même manière, après E, le gaz se refroidit de manière isochore à la température T_c et il subit ensuite la détente isotherme à T_c .

-n- Dessinez l'ensemble du cycle ABEFD sur un diagramme $p(V)$ (on garde les mêmes notations pour les points A, B, C et D du cycle idéal).

-o- Donner le signe des chaleurs et travaux échangés (indiquer 0 si la valeur est nulle) pour les transformations CE, EF et FC

-p- Quel est le signe du travail échangé pour le cycle CEFC, W_{CEF} ? Justifiez.

-q- Quelles chaleurs échangées doit-on prendre en compte pour le calcul de Q_c ? Justifiez.

-r- Exprimer le rendement de ce cycle en fonction de W_{Carnot} , W_{CEF} , Q_{Carnot} et des chaleurs échangées pour les transformations CE, EF et FC.

Exercice 2 : Analyse du passage graduel d'une évolution irréversible à réversible (17 points + 1 points Bonus)

Le but de ce problème est de modéliser l'expérience d'auditoire sur les compressions isothermes réversibles et irréversibles.

Cette expérience est utilisée pour illustrer la différence entre une évolution quasistatique réversible et une évolution irréversible hors équilibre dans le cas d'une compression isotherme d'un gaz parfait. Un piston est constitué d'une éprouvette retournée dans de l'eau dans laquelle de l'air est emprisonné. La compression est effectuée en appuyant sur le haut de l'éprouvette et l'ensemble est en contact thermique avec l'extérieur. Dans le cas hors équilibre nous comprimons puis détendons le piston avec une seule masse déposée puis retirée en une seule fois sur le piston. Le cas quasistatique est approximé en déposant graduellement 11 petites masses. La somme des 11 petites masses est égale à la masse précédente.



Notations et variables utilisées :

P_i, V_i	Pression, volume et température de l'état initial.
P_f, V_f	Pression, volume et température de l'état final.
T	Température des transformations isothermes.
R	Constante des gaz parfaits.
n	Nombre de moles.
M	Masse totale M .
N	Nombre de masses égales dans lequel est divisée la masse totale M .
j	Index du nombre d'étape, $j=1\dots N$.
ΔP	Variation de la pression lors de l'étape j à $j+1$.
W_{rev}	Travail échangé pour l'évolution réversible.
W_{ir}	Travail échangé pour l'évolution irréversible.
W_j	Travail échangé pour l'évolution de l'étape j à $j+1$.
W_{tot}^N	Travail total échangé pour l'évolution des étapes 1 à N .
$Q_{\text{rev}}, Q_{\text{ir}}, Q_j, Q_{\text{tot}}^N$	Idem pour la chaleur.
U	Énergie interne.
S	Entropie.
S_{ech}	Entropie échangée.
S_{int}	Entropie interne ou créée.
$S_{j,\text{ech}}$	Entropie échangée de l'étape j à $j+1$.
$S_{j,\text{int}}$	Entropie interne ou créée de l'étape j à $j+1$.

$S_{tot,ech}^N$	Entropie échangée pour l'évolution des étapes 1 à N.
$S_{tot,int}^N$	Entropie interne ou créée pour l'évolution des étapes 1 à N.

Partie A. Cas réversible. On appuie progressivement sur le plateau de manière à ce que la pression passe de P_i à P_f de manière quasi-statique et isotherme.

-a- Calculer en fonction de n, R, T, V_i, V_f puis en fonction de n, R, T, P_i, P_f , le travail échangé, W_{rev} , la chaleur échangée, Q_{rev} , la variation d'énergie interne, ΔU et la variation d'entropie ΔS .

Partie B. Cas irréversible. On passe instantanément de la pression P_i à P_f en déposant une masse M sur le plateau et on attend que le système se thermalise à la température ambiante, T .

-b- Calculer le travail échangé, W_{ir} , la chaleur échangée, Q_{ir} , la variation d'énergie interne, ΔU , l'entropie échangée, S_{ech} et l'entropie interne ou créée, S_{int} en fonction de n, R, T, P_i, P_f ,

-c- Montrer que $S_{int} > 0$.

Partie C. Cas discret avec N étapes. La masse M est divisée en N masses identiques. On indexe par j les N étapes, $j=1 \dots N$. À chaque étape, de j à $j+1$, la pression augmente donc de $\Delta P = (P_f - P_i)/N$.

-d- Écrire la relation entre P_j, P_{j+1}, V_j et V_{j+1} .

-e- Calculer, $W_j, Q_j, S_{j,ech}$ et $S_{j,int}$ le travail, la chaleur, l'entropie échangées et l'entropie interne ou créée lors de l'étape j à $j+1$.

-f- Exprimer, sous la forme d'une série, le travail total échangé, W_{tot}^N , pour l'évolution des étapes 1 à N.

-g- En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_{tot}^N = W_{rev}$$

Et que

$$W_{rev} < \dots < W_{tot}^{N+1} < W_{tot}^N \dots < W_{ir}$$

Indication : Reconnaître dans la série une somme bien connue en analyse que l'on rencontre dans le calcul d'une intégrale et reconnaître l'intégrale d'une fonction usuelle.

-h- Exprimer, sous la forme d'une série, l'entropie créée, $S_{tot,int}^N$, pour l'évolution des étapes 1 à N.

-i- Montrer que : $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{tot,int}^N = 0$

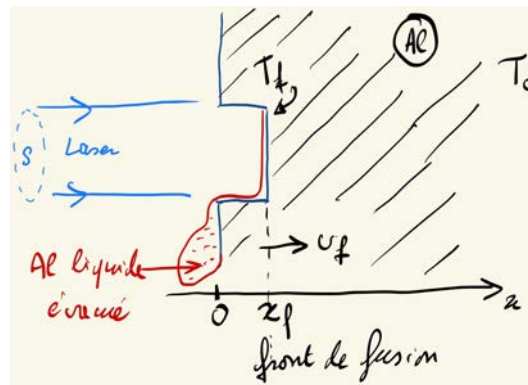
-j- **Question Bonus :** Compléter le dessin avec la répartition des N masses à l'étape initiale, finale et lorsque l'on fait la transformation retour. Discuter où se manifeste l'irréversibilité et comment on retrouve le cas réversible quand $N \rightarrow \infty$.

Exercice 3 : Découpe laser (16 points+ 1 points Bonus)

Notations et variables utilisées :

ρ	Masse volumique de l'aluminium.
c	Capacité calorifique massique de l'aluminium.
λ	Conductivité thermique de l'aluminium.
T_f	Température de fusion de l'aluminium.
T_v	Température de vaporisation de l'aluminium.
L_f	Chaleur latente massique de fusion de l'aluminium.
L_v	Chaleur latente massique de vaporisation de l'aluminium.
S	Aire du faisceau laser.
P	Puissance du laser.
x_f, v_f	Position et vitesse du front de fonte.
T_0	Température ambiante.
$T(x,t)$	Température dans le barreau en fonction de la distance, x , et du temps, t .
a	Diffusivité thermique.
d	Distance caractéristique du profil de température

La découpe laser consiste à faire fondre localement un matériau solide grâce à l'énergie apportée par un laser. Nous allons étudier la fusion de l'aluminium sous l'effet du rayonnement laser qui est absorbé dans le matériau. Pour cela on considère une plaque homogène en aluminium, de masse volumique ρ , de capacité calorifique massique, c , de conductivité thermique, λ . On note T_f la température de fusion de l'aluminium et L_f sa chaleur latente massique de fusion. Cette plaque est éclairée uniformément par un laser dont l'étendue est S (dimension d'une surface), de puissance P . Durant un temps dt , la plaque absorbe donc une énergie $P \cdot dt$ répartie sur la surface S .



L'aluminium liquide provenant de la fusion est immédiatement évacué. Soit x_f , l'abscisse du plan où la fonte se produit et $v_f = \dot{x}_f$ la vitesse de progression du front de fonte. On néglige les effets de diffusion de la chaleur dans les directions perpendiculaires à Ox . On se restreint à un modèle à une dimension. La température dans le barreau ne dépend donc que de x et t : $T(x,t)$. En $x = x_f$ $T = T_f$ et loin du front de fonte, quand $x \rightarrow \infty$, la température tend vers la température ambiante, T_0 . On fait l'hypothèse que, une fois le régime de découpe établi v_f est constant.

-a- Question de cours : Rappeler l'équation de la diffusion de la chaleur à laquelle satisfait $T(x,t)$. On supposera que toute l'énergie du laser est absorbée à la surface et que

donc le terme de création volumique d'énergie est nul. On introduira a , la diffusivité thermique que l'on exprimera en fonction de ρ , c et λ .

-b- On se place dans un référentiel, \mathcal{R}' , en translation uniforme à la vitesse v_f . On cherche des solutions de la forme : $T(x, t) = F(x - v_f t)$. On pose $x' = x - v_f t$. Montrer que l'équation obtenue en **-a-** s'écrit : (on pourra admettre ce résultat dans la suite du problème)

$$-v_f \frac{dF}{dx'} = a \frac{d^2 F}{dx'^2}$$

et expliquer pourquoi les solutions correspondent à un régime stationnaire du profil de température dans le référentiel \mathcal{R}' .

-c- Montrer que

$$T(x - v_f t) = T_0 + (T_f - T_0) e^{-\frac{v_f(x - v_f t)}{a}}$$

Indication : Pour résoudre cette équation différentielle, posez $G(x') = \frac{dF}{dx'}$, intégrez une première fois pour trouver $G(x')$ puis une seconde fois pour trouver $F(x')$. On prendra $x_f = 0$ à $t = 0$. $F(x')$ et $G(x')$ sont juste des noms arbitraires de fonction, ils n'ont rien à voir avec l'énergie et l'enthalpie libre.

Rappel : la dérivée de $e^{\alpha x}$ est $\alpha e^{\alpha x}$ et la primitive de $e^{\alpha x}$ est $\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + Cst$.

-d- Question Bonus : Sur quelle distance caractéristique, d , se fait sentir l'échauffement du barreau ?

-e- On suppose que la face éclairée absorbe toute l'énergie lumineuse du laser. Durant le temps dt , le front de fonte passe de x_f à $x_f + dx_f$. Effectuez un bilan énergétique sur l'élément de cylindre de section S et d'épaisseur dx_f , entre x_f et $x_f + dx_f$ en prenant en compte la fonte de l'aluminium, l'énergie apportée par le laser durant dt et la conduction thermique dans le barreau, donnée par la loi de Fourier puis établir une relation entre P , v_f , L_f , ρ , λ et $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$.

-f- En déduire que v_f est donnée par l'expression ci-dessous et discuter le sens physique des deux termes au dénominateur.

$$v_f = \frac{P}{\rho(L_f + c(T_f - T_0))}$$

-g- En réalité l'aluminium se vaporise lors du perçage, soit L_v , la chaleur latente de vaporisation, T_v , la température de vaporisation. Donner, sans calcul, la nouvelle expression de v_f . On supposera que la capacité calorifique massique, c , est identique pour l'aluminium solide et liquide.

-h- Pour un laser CO_2 qui fournit 80 kW dans un faisceau de $0,8 \text{ mm}^2$, le calcul prédit 0,36 ms pour percer un trou de 1 mm de profondeur. En pratique il faut plutôt 0,46 ms, commentez.